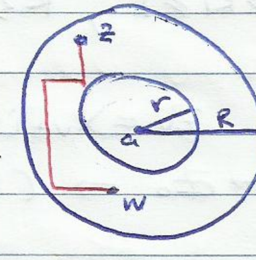
Δακτύλιος:

Είχαμε δει ότι $B(a,r)=\{z\in\mathbb{C} : |z-a|<r\}$

Τότε ορίζουμε:

$B(a,R)\setminus\overline{B(a,r)} = \Delta(a;r,R)$, $r<R$

(δακτύλιος).



Έτσι $\Delta(a,0,R) = B_0(a,R)$

Ο δακτύλιος είναι ανοιχτό σύνολο

διότι

$$B(a,R)\setminus\overline{B(a,r)} = B(a,R)\cap\left(\overline{B(a,r)}\right)^c = B(a,R)\cap\left(B(a,r)^c\right)^\circ$$

Έχουμε τομή δύο ανοιχτών συνόλων $\Rightarrow$ $\Delta(a;r,R)$ ανοιχτό

Επίσης, είναι συνεκτικό σύνολο.

Άρα, $\Delta(a;r,R)$ είναι ένας τόπος

Πχ

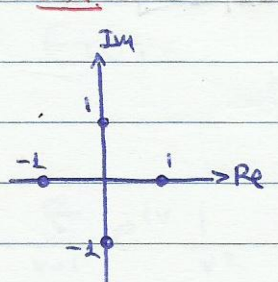
$B(0;0,+\infty)$: είναι όλο το ημιεπίπεδο

Ακολουθίες σημείων χώρου.

Είναι μια απεικόνιση $z:\mathbb{N}\to\mathbb{C}$ που την ονομάζουμε ακολουθία στους μιγαδικούς με $z(1)=z_1$, $z(2)=z_2$, $\dots$, $z(\nu)=z_\nu$, $\dots$

$\{z_\nu : \nu\in\mathbb{N}\}=\{z_1,z_2,\dots,z_\nu,\dots\}$

Πχ



$z_\nu = i^{\nu-1}$, $\nu\in\mathbb{N}=\{1,2,\dots\}$

Δηλ. οι αριθμοί που παράγονται από τη $z_\nu,\nu\in\mathbb{N}$ είναι οι εξής $\{1,i,-1,-i\}$

Συγκλίνουσα ακολουθία

$$z_\nu\to a \ \left(\text{ή } \lim_{\nu\in\mathbb{N}} z_\nu = a\right) \overset{\text{ορ.}}{\iff} |z_\nu-a|\to 0 \iff \begin{cases}(\forall\varepsilon>0)(\exists\nu_0)\ \nu\geq\nu_0 \Rightarrow \\ \Rightarrow |z_\nu-a|<\varepsilon\end{cases}$$

$$z_\nu\not\to a \iff (\exists\varepsilon>0)(\forall\nu_0)(\exists\nu_1\geq\nu_0)\ \&\ |z_{\nu_1}-a|\geq\varepsilon$$

Υπακολουθίες:

$z_\nu \not\to a \Leftrightarrow (\exists k_\nu \in \mathbb{N})\ k_\nu \geq \nu \Rightarrow |z_{k_\nu} - a| \geq \varepsilon$

(το $k_\nu \geq \nu$ αποδεικνύεται με επαγωγή αφού $k_2 > k_1 \geq 1$, $k_3 > k_2 \geq 1$, ...)

Έστω $z_\nu = x_\nu + i y_\nu$ και $z_0 = a + i b$

$z_\nu \to z_0 \Rightarrow (\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0)\ \forall \nu \geq \nu_0 \Rightarrow \begin{cases} |x_\nu - a| < \varepsilon \\ \& \\ |x_\nu - b| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_\nu \to a \\ y_\nu \to b \end{cases}$

διότι $|x_\nu - a|\ \&\ |y_\nu - b| \leq \sqrt{(x_\nu - a)^2 + (y_\nu - b)^2} < \varepsilon$

Άρα, $z_\nu \to\ \Rightarrow \begin{cases} Re(z_\nu) \to Re(z_0) \\ Im(z_\nu) \to Im(z_0) \end{cases}$

Επίσης, για το τυχόν $\varepsilon > 0$

$x_\nu \to z_0 : (\exists \nu_1)\ \nu \geq \nu_1 \Rightarrow |x_\nu - a| < \varepsilon$

$x_\nu \to z_0 : (\exists \nu_2)\ \nu \geq \nu_2 \Rightarrow |y_\nu - b| < \varepsilon$

$\nu_0 := \max\{\nu_1, \nu_2\}$

$\nu \geq \nu_0 \Rightarrow |z_\nu - z_0| = \sqrt{(x_\nu - a)^2 + (y_\nu - b)^2} \leq \varepsilon\sqrt{2}$

Άρα, $z_\nu \to z_0$.

Βασικές Ακολουθίες:

$z_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ βασική $\Leftrightarrow \left[(\forall \varepsilon > 0)(\exists \nu_0 \in \mathbb{N})\ \forall \nu, \mu \geq \nu_0 \Rightarrow |z_\nu - z_\mu| \leq \varepsilon \right]$

$z_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ βασική $\Leftrightarrow z_\nu, \nu \in \mathbb{N}$ συγκλίνουσα

ΣΕΙΡΕΣ ΜΙΓΑΔΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

$\sum_{v=0}^{\infty} z_v$: Τυπικό άθροισμα $= z_0 + z_1 + z_2 + \dots$

$S_0 = z_0$

$S_1 = z_0 + z_1$

$S_2 = z_0 + z_1 + z_2$

$\vdots$

$S_v = z_0 + z_1 + z_2 + \dots + z_v$:= ακολουθία μερικών αθροισμάτων

$\vdots$

ΣΥΓΚΛΙΣΗ ΑΚΟΛΟΥΘΙΑΣ ΜΕΡΙΚΩΝ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΩΝ:

Εξετάζω αν η ακολουθία μερικών αθροισμάτων είναι βασική ώστε η σειρά να συγκλίνει.

Έτσι για $\mu > v$: $|S_\mu - S_v| = |(\cancel{z_0 + z_1 + \dots} \overset{z_{v+1}}{} + z_\mu) - (\cancel{z_0 + z_1 + \dots + z_v})| =$

$= |z_{v+1} + \dots + z_\mu| < \varepsilon$, $\mu > v \geq v_0$

$\Rightarrow \left|\sum_{k=v+1}^{\mu} z_k\right| \leq \sum_{k=v+1}^{\mu} |z_k| < \varepsilon$.

ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ

Εάν $|z_v| \leq M_v$, $v = 0, 1, \dots$

όπου $\sum M_v < \infty$ τότε $\sum |z_v| < \infty$

Έτσι $\sum_{k=v+1}^{\mu} |z_k| \leq \sum_{k=v+1}^{\mu} M_k < \varepsilon$

Πχ

$$\sum_{v=1}^{\infty} e^{iv} \frac{1}{v^2}$$

Παίρνουμε $\left|\frac{e^{iv}}{v^2}\right| = \frac{1}{v^2}$ αλλά $\sum \frac{1}{v^2} < \infty$ $(p = 2 > 1)$

Άρα , Η σειρά συγκλίνει $(e^{iv} = \text{συν}\, v + i\, \text{ημ}\, v)$

Επίσης εάν $\sum_{v=0}^{+\infty} z_v < \infty \Rightarrow \lim_{v \in N} z_v = 0$
(το ανάποδο δεν ισχύει διότι η $\frac{1}{v} \to 0$
αλλά $\sum \frac{1}{v} = +\infty$)

Κριτήριο D'Alembert:
Έστω $\sum x_v$, $\exists \lim \frac{x_{v+1}}{x_v} = l \in \mathbb{R}^+$

Εάν
1) $l < 1 \Rightarrow \sum x_v < \infty$
2) $l > 1 \Rightarrow \sum x_v = \infty$
3) $l = 1 \Rightarrow$ Δεν μπορούμε να αποφανθούμε.

Κριτήριο ν-οστής ρίζας Cauchy:
Έστω $\sum x_v$ και $\exists \limsup_{v \in N} \sqrt[v]{|x_v|} = l \in \mathbb{R}^+$ τότε
έχουμε τα ίδια συμπεράσματα με το κρ. D'Alembert

<u>Αποδ.</u>
1) $l < 1$: $\exists p : l < p < 1$
$\exists v_0 : \sqrt[v]{|x_v|} \le p, \ \forall v \ge v_0 \Rightarrow |x_v| \le p^v$
Έτσι, για $p < 1$ τότε
$$\sum_{v=v_0}^{\infty} p^v = \frac{p^{v_0}}{1-p} < +\infty$$
Άρα, από κρ. σύγκρισης και η μικρότερη σειρά $\sum |x_v| < \infty \Rightarrow \sum x_v < \infty$.

2) $\exists v_0$ και k_v : $v \ge v_0 \Rightarrow \sqrt[k_v]{|x_{k_v}|} > r \Rightarrow |x_{k_v}| > r^{k_v}$
η σειρά δεν συγκλίνει

Κρ. Cauchy για τους μιγαδικούς είναι όμοιο.